

Уравнение математической физики - Лекции 17-801
 Шовенков Игорь, Николаевич

Лекция №1 (Шовенков)

Тихонов, Сошарский "Уравнение математической физики"
 Захаров, Дмитриева "Лекции по урав-нию ЛФ"

$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0$ - общее уравнение для урав-ния в част-ных пр-вых 2-го порядка

$$\begin{cases} a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + \tilde{F}(x, y, u, u_x, u_y, u) = 0 \\ a_{11} = a_{11}(x, y) \\ a_{12} = a_{12}(x, y) \\ a_{22} = a_{22}(x, y) \end{cases}$$

урав-е в стандартном виде

$a_{11} = a_{11}(x, y, u, u_x, u_y)$ - квадратичное от старших пр-ых

Урав-е Монжа - Ашпера

$$u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = \pm 1$$

$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c u + f = 0$ - линейное

Если $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c = const$ - урав-е с постоянными коэффициентами

Примеры:

$$x u_{xx} - y u_{yy} = f(x, y) - \text{линейное}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y) - \text{урав-е с постоянными коэффициентами}$$

Если $f(x, y) = 0$ - однородное урав-е

Пример

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

и - решение, которое ищем.

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

Мы будем заниматься

теория, масса, заряд - сохраняются

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

$$u = u(x, t)$$

$u_t = a^2 u_{xx}$ - теплопроводность, диффузия

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ - стационарный процесс

1) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
 $\Delta u = -f(x, y, z)$ Δ - оператор Лапласа

Ищем решение от вида $z = \varphi(x, y)$

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

$$\begin{cases} \varphi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases} \quad \begin{aligned} u_x &= u_\varphi \varphi_x + u_\eta \eta_x \\ u_y &= u_\varphi \varphi_y + u_\eta \eta_y \end{aligned}$$

$$u_{xx} = u_{\varphi\varphi} \varphi_x^2 + 2u_{\varphi\eta} \varphi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\varphi \varphi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\varphi\varphi} \varphi_x \varphi_y + u_{\varphi\eta} \varphi_x \eta_y + u_{\eta\varphi} \eta_x \varphi_y + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\varphi \varphi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = u_{\varphi\varphi} \varphi_y^2 + 2u_{\varphi\eta} \varphi_y \eta_y + u_{\eta\varphi} \eta_y \varphi_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\varphi \varphi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$$

$$u_{\varphi\varphi} (a_{11} \varphi_x^2 + 2a_{12} \varphi_x \varphi_y + a_{22} \varphi_y^2) + 2u_{\varphi\eta} (a_{11} \varphi_x \eta_x + a_{12} (\varphi_x \eta_y + \varphi_y \eta_x) + a_{22} \eta_y \eta_y) + u_{\eta\eta} (a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2) + \tilde{F}(\varphi, \eta, u, u_\varphi, u_\eta) = 0$$

$$- \overline{a_{11}} u_{\varphi\varphi} + 2\overline{a_{12}} u_{\varphi\eta} + \overline{a_{22}} u_{\eta\eta} + \tilde{F}(\varphi, \eta, u, u_\varphi, u_\eta) = 0$$

$$\overline{a_{11}} = 0$$

$$- a_{11} z^2 + 2a_{12} z x z y + a_{22} z y^2 = 0 \quad (5) \quad \begin{aligned} \overline{a_{11}} = 0 \quad z = \varphi \\ \overline{a_{22}} = 0 \quad z = \eta \end{aligned} \quad \text{— определяем}$$

$$\text{Если } \varphi(x, y) = C, \text{ то } d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

$$a_{11} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2a_{12} \frac{dy}{dx} + a_{22} = 0$$

$$a_{11} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right)^2 - 2a_{12} \left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y} \right) + a_{22} = 0$$

$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dy dx + a_{22} dx^2 = 0 \quad (6) \quad \text{— перепишем (5)}$$

$$a_{11} z x^2 + 2a_{12} z x z y + a_{22} z y^2 = 0 \quad (5)$$



$$a_{11} dy^2 - 2a_{12} dx dy + a_{22} dx^2 = 0 \quad (6)$$

$$\text{Если } z = \varphi(x, y) \text{ — решение (5), то } \varphi(x, y) = C \text{ — решение (6)}$$

$$\text{Если } \varphi(x, y) = C \text{ — решение (6), то } z(x, y) = \varphi(x, y) \text{ — решение}$$

$$\text{Если } a_{11} \neq 0, \text{ то}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11} a_{22}}}{a_{11}}$$

$$1) \quad x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0$$

$$a_{11} = x^2$$

$$a_{12} = 0$$

$$a_{22} = -y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{x^2 y^2}}{x^2} \quad \begin{matrix} x > 0, y > 0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = C_1 \\ xy = C_2 \end{cases}$$

2) Если $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ - упр-е эллиптического типа
ищем $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$

$$\xi = \varphi_1(x, y)$$

$$\eta = \varphi_2(x, y), \text{ то}$$

$$\overline{a_{11}} = 0 \quad \overline{a_{22}} = 0$$

$$u_{\xi\eta} = \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_{\xi}, u_{\eta}) \quad \text{- I-ая каноническая ф-ма для упр-е эллиптического типа}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\xi + \eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi - \eta}{2} \end{cases}$$

$$u_{\xi} = u_{\alpha} \frac{1}{2} + u_{\beta} \frac{1}{2}$$

$$u_{\xi\eta} = u_{\alpha\alpha} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} u_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} u_{\beta\alpha} - \frac{1}{4} u_{\beta\beta}$$

3) $u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \tilde{\Phi}(\alpha, \beta, u, u_{\alpha}, u_{\beta})$ - II кан-ая форма для упр-е эллиптического типа

2) $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$ - параболический тип

3) $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} < 0$
гиперболический тип.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

$$\xi = \varphi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y) \quad \text{- не зависит от } \varphi \quad \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{aligned} \overline{a_{12}} &= a_{11} \varphi_x \eta_x + a_{12} (\varphi_x \eta_y + \varphi_y \eta_x) + a_{22} \varphi_y \eta_y = a_{11} \varphi_x \eta_x + \sqrt{a_{11} a_{22}} (\varphi_x \varphi_y + \\ &+ \varphi_y \eta_x) + a_{22} \varphi_y \eta_y = \sqrt{a_{11}} \varphi_x (\sqrt{a_{11}} \eta_x + \sqrt{a_{22}} \eta_y) + \sqrt{a_{22}} \varphi_y (\sqrt{a_{11}} \eta_x + \\ &+ \sqrt{a_{22}} \eta_y) = (\sqrt{a_{11}} \varphi_x + \sqrt{a_{22}} \varphi_y) (\sqrt{a_{11}} \eta_x + \sqrt{a_{22}} \eta_y) = 0 \end{aligned}$$

Решим по σ_{22}

$$u_{\eta\eta} = \Phi(\eta, \eta_x, \eta_y, \eta_{\eta})$$

$$3) \text{ Если } a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, \text{ то}$$

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases}$$

$$\overline{a_{11}} = a_{11}(\alpha + i\beta x)^2 + 2a_{12}(\alpha + i\beta x)(\alpha + i\beta y) + a_{22}(\alpha + i\beta y)^2$$

$$\overline{a_{22}} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2 \quad - \text{взяв поочередно}$$

$$\overline{a_{11}} = 0$$

$$\overline{a_{22}} = 0$$

$$a_{11}\alpha x^2 + 2a_{12}\alpha x dy + a_{22}\alpha y^2 - a_{11}\beta x^2 - 2a_{12}\beta x\beta y - a_{22}\beta y^2 +$$

$$i(2a_{11}\alpha x\beta x + 2a_{12}(\alpha x\beta y + \alpha y\beta x) + 2a_{22}\alpha y\beta y) = 0$$

$$a_{11}\alpha x^2 + 2a_{12}\alpha x dy + a_{22}\alpha y^2 - (a_{11}\beta x^2 + 2a_{12}\beta x\beta y + a_{22}\beta y^2) = 0$$

$$a_{11}\alpha x\beta x + a_{12}(\alpha x\beta y + \alpha y\beta x) + a_{22}\alpha y\beta y = 0$$

$$\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}$$

$$\overline{a_{12}} = 0$$

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (\overline{a_{12}}^2 - \overline{a_{11}}\overline{a_{22}})D^2$$

$$D = \begin{vmatrix} \eta_x & \eta_y \\ \xi_x & \xi_y \end{vmatrix}$$

$$1) u_{tt} - \Delta^2 u_{xx} = f(x, t)$$

$$1^* u_{xy} = f(x, y)$$

$$2) u_t = \Delta^2 u_{xx} + f(x, t)$$

$$3) u_{xx} + u_{yy} = -f(x, y)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z)$$

$$u_{xx} + u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + cu + f = 0$$

$$u = v e^{\lambda x + \mu y}$$

$$u_x = (v_x + \lambda v) e^{\lambda x + \mu y}$$

$$u_y = (v_y + \mu v) e^{\lambda x + \mu y}$$

$$u_{xx} = (v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v) e^{\lambda x + \mu y}$$

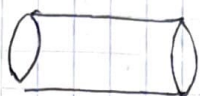
$$u_{yy} = (v_{yy} + 2\mu v_y + \nu \mu^2) e^{\lambda x + \mu y}$$

У. Лекция №2. (Шубеников)

Универсальное уравнение непрерывности.

Течение жидкости

$$\vec{j} = \rho \vec{v}$$



$$t = \tau \quad h = l \cdot \vec{v}$$

$$\text{Если } F = 0$$

$$S = 1$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$\rho = \text{const}$$

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

ρ - некоторая сопр. величина
 j - плотность потока величины
 F - интенсивность источника
 $\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \rho dV \right) = - \underbrace{\iint_S j d\vec{S}}_{\text{по ф-ле конт-стии}} + \iiint_V F dV$

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} - F \right) dV = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = F$$

Процесс диффузии Молекулы сокращаются

$P = u$ - плотность вещества

$$\vec{j} = -D \text{grad} u$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(D \text{grad} u) = f$$
 - уравнение диффузии

Теплопроводность

$P = c \rho u$, c - удельная теплоемкость

ρ - плотность

u - тем-ра

$$\vec{j} = \vec{q} = -k \text{grad} u$$

f - интенсивность источников

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} u) + f$$
 - уравнение теплопроводности

Простейший случай: все пар-ки константы.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u + f \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \text{div}(\text{grad} u)$$

Теплопроводности

$$c = c_0; \rho = \rho_0; k = k_0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f \quad a^2 = \frac{k_0}{c_0 \rho_0} \text{ - коэф-т теплопроводности}$$

$$f = \frac{P}{c_0 \rho_0}$$

Далее по 0.2

Будем считать, что $u = u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) - \text{непрерывный}$$

Пример $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$u(x, t) = 0, 1, 2022, t, \frac{x^2}{2}, e^{-t} \sin x$$

Задача поставлена корректно, если:

Решение существует единственно

Принцип Максвелла. Уравнение теплопроводности

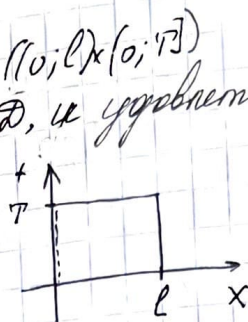
Рассмотрим область.

$$[0; l] \times [0; T]$$

Пусть $u(x, t)$ - непрерывна в $\bar{D}$, и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Тогда $\max_0 u(x, t) = \max_{\substack{x=0 \\ x=l \\ t=0}} u(x, t)$



Пусть $\max_{\substack{x=0 \\ x=l \\ t=0}} u(x, t) = M$ и $\exists (x_0, t_0) \in D, u(x_0, t_0) = M + \epsilon$

м.к. $k(t_0 - t) < kT$
 $kT < \frac{\epsilon}{2}$

$$v(x, t) = u(x, t) + k(t_0 - t)$$

$v(x_0, t_0) = M + \epsilon$, м.к.
 $k(t_0 - t) < kT < \frac{\epsilon}{2}$ (выберем k)

$\max v(x, t) \leq M + \frac{\epsilon}{2}$

$\exists (x_1, t_1) v(x_1, t_1) \geq M + \epsilon$

$v(x_1, t_1) = \max v(x, t)$, получаем

$v_{xx} = u_{xx}, x = x_1, t = t_1, u_{xx} \leq 0$ } Противоречие

$v_t = u_t - k, x = x_1, t = t_1$

$u_t(x_1, t_1) \geq k > 0$

$v_{xx} = u_{xx} \leq 0$
 $x = x_1, t = t_1$
 $v_t = u_t - k > 0$

Максимум в центре $\Rightarrow$ везде
иначе на границе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

① линейная задача

$$u(0, t) = \mu_1(t)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$u(x, t) \in C^{2,1}((0; l) \times (0; T]) \cap C([0, l] \times [0; T])$$

$u_t = u_{xx}, 0 < x < l, t > 0$ Число предписывается тем же решением

$$\begin{cases} u(0, t) = 1 \\ u(l, t) = 2 \\ u(x, 0) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ \vec{q} = -k \text{grad} u \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = v_1(t) \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = v_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\vec{q} \Big|_{\Gamma} = h(u - \theta(t)) \cdot \vec{n}$$

$$-k \text{grad} u \cdot \vec{n} \Big|_{\Gamma} = h(u - \theta(t)) \Big|_{\Gamma}$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = h(u - \theta) \Big|_{x=l}$$

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = h(u - \theta) \Big|_{x=0}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha h(u + \theta) \Big|_{x=l} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha h(u - \theta) \Big|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

② $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t) & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u \Big|_{t=0} = u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$ Задача Коши

③ $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < +\infty, t > 0 \\ u(0, t) = \mu(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$

Простейший вариант метода Фурье.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

вспомогательная задача

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \\ X T' = a^2 X'' T \\ X(0) T(t) = 0 \quad X(0) = 0 \\ X(l) T(t) = 0 \quad X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda$$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -k^2 \quad x'' - k^2 x = 0$$

$$x(x) = C_1 \cosh(kx) + C_2 \sinh(kx)$$

$$x(0) = C_1 = 0$$

$$x(l) = C_2 \sinh(kl) = 0, C_2 = 0$$

$$x(x) = 0$$

Übergang, $\lambda > 0$

$$x'' = -\lambda x$$

$$\int_0^l x'' x dx = -\lambda \int_0^l x^2 dx \quad (m.k. x'' = -\lambda x)$$

$$x'x \Big|_0^l - \int_0^l (x')^2 dx = -\lambda \int_0^l x^2 dx$$

$$2) \lambda = 0$$

$$x'' = 0; \quad x(x) = C_1 x + C_2$$

$$x(0) = C_2 = 0$$

$$x(l) = C_1 l = 0, C_1 = 0$$

$$x(x) = 0$$

$$3) \lambda > 0$$

$$x(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

$$x(0) = C_1 = 0$$

$$x(l) = C_2 \sin(\sqrt{\lambda} l) = 0, \quad \sqrt{\lambda} l = \pi n, n = 1, 2$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$x_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\|x_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{l}{2}$$

$$T_n(t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}$$

$$u_n(x, t) = e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right) \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x)$$

$$C_n \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Проверка:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \varphi_n e^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$t=0: \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \left(\frac{\pi n x}{l}\right) = \varphi(x)$$

Если $|\varphi(x)| < \varepsilon$, то

$|u(x, t)| < \varepsilon \Rightarrow$ удовлетворяется.

Лекция №2 (Фемингов)

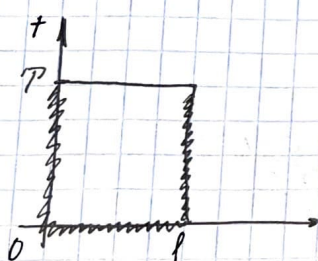
$u(x, t)$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) & 0 < x < l, 0 < t \leq T \quad (1) \end{cases}$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

$$u(l, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4)$$



$$Q_{\overline{et}} = \{(x, t): 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$$

$$Q_{et}$$

$$\Gamma = \overline{Q_{et}} \setminus Q_{et}$$

$$u(x, t) \in C[\overline{Q_{et}}] \quad u \in C^{2,1}[Q_{et}]$$

u, u_x, u_{xx}, u_t непрерывны в Q_{et}

Определение Функция $u(x, t)$ называется решением первой краевой задачи для уравнения теплопроводности, если

- 1) $u \in C[\overline{Q_{et}}]$
- 2) $u \in C^{2,1}[Q_{et}]$ - выполнено (1)
- 3) u удовлетворяет (1) (2) (3) (4)

- Если выполнить первое условие

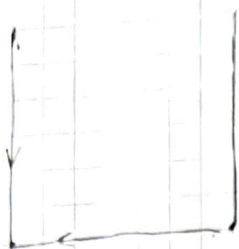
$$f(x, t) = 0 \rightarrow u_t = a^2 u_{xx}$$

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} \text{const} & (x, t) \in Q_{et} \\ \mu_1(t) & x=0 \\ \mu_2(t) & x=l \\ \varphi(x) & t=0 \end{cases}$$

- Если $u \in C^{2,1}[\overline{Q_{et}}] \Rightarrow$ накладываем граничные условия на μ_1, μ_2, φ

$$u_1(0) = \varphi(0)$$

$$u_2(l) = \varphi(l)$$



Граничные условия

См. решение. Метод разделения переменных.

Метод Фурье

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < l \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

$$u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (4)$$

Метод разделения переменных. Ищем решение ур-ния (1) в виде

$$v(x, t) = X(x) P(t)$$

$$X(x) P'(t) = a^2 P(t) X''(x)$$

$$\frac{P'(t)}{a^2 P(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$$

$$X_n(x) = \tilde{C}_n \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$v_n(x, t) = C_n \sin \frac{\pi n}{l} x \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\}$$

выполнению (4)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x, t)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{\pi n}{l} x \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\}$$

$$P'(t) + a^2 \lambda P(t) = 0, \quad 0 < t \leq T$$

$$P_n(t) = \tilde{C}_n \exp \left\{ -\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t \right\}$$

, чтобы получить, чтобы

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_0^l \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x dx = \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x dx$$

$$c_m = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi m}{l} x dx$$

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \alpha^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (5)$$

Восстановление о функции Фурье



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{\pi n}{l} x \quad 0 \leq x \leq l$$

$$f_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds$$

Если $f(x)$ нег сходимое равномерно, абсолютно на отрезке,

Если $f(x) \in C[0, l]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 < \infty$

$\hat{f}(x) \in C[0, l]$, то нег $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^2 < \infty$

$$\hat{f}_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

Теорема (существование) Пусть $\varphi(x) \in C^1[0, l]$ и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда $u(x, t)$ определенное группы (5) , такое,

что $u \in C[\bar{Q}_{\text{ep}}]$, $u \in C^{2,1}(\bar{Q}_{\text{ep}})$ и $u(x, t)$ удовлетворяет (1)-(4)

Доказательство

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n}{l} s ds = \frac{2}{l} \left(-\frac{l}{\pi n} \right) \cos \frac{\pi n}{l} s \varphi(s) \Big|_0^l + \frac{2}{\pi n} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds$$

$$\frac{2}{l} \int_0^l \varphi'(s) \cos \frac{\pi n}{l} s ds = \varphi_n$$

Пог $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сход

$$|\varphi_n| \leq \frac{2}{\pi n} |\hat{\varphi}_n| \leq \frac{2}{\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \varphi_n^2 \right)$$

Пог $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n|$ сход по принципу сходимости дере нег.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}_{\text{ep}}$$

$$|u_n(x, t)| \leq |\varphi_n|$$

4.10) - 10

Решением из условия $\Rightarrow u \in C[\bar{Q}_{LT}] \oplus$ - первый пункт задачи

② $u \in C^{2,1}[\bar{Q}_{LT}]$

$Q_{LT} = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$

$Q_{LT}^0 = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t_0 \leq t \leq T\}$, докажем, что

$u \in C^{2,1}[\bar{Q}_{LT}^0]$.

Решение можно дискретизировать, если - все члены ряда дискр-ти
 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$ Ряд из произведения их - а по-но

Докажем равномерную сходимость в Q_{LT}^0

$\left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| \leq |\varphi_n| \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t_0} \cdot 1$

$\forall (x, t) \in Q_{LT}^0$

$u_{xx}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$

$u \in C^{2,1}[\bar{Q}_{LT}]$

$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x)$

Лемма 1 Пусть $\varphi(x) \in C^1[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$

Тогда $u(x, t)$ одн. ф-ной (5)

$u(x, t)$ непрерывна при $t \geq 0$ $u(x, t) \in C^{2,1}\{0 \leq x \leq l, t > 0\}$

$u(x, t)$ удовн. уравн. $u_t = a^2 u_{xx}$ $0 < x < l, t > 0$

u удовлетворяет гранич. условиям при $0 \leq t$ и на $t=0$

Лемма 2 Если $\varphi \in C^1[0, l]$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то

$u(x, t)$ одн. ф-ной (5) абсолютно дискр. $0 \leq x \leq l, t > 0$

$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial t^q}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\right)^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \cdot \left(\frac{\pi n}{l}\right)^p \sin \frac{\pi n}{l} x$

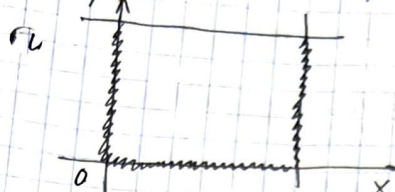
$|\varphi_n| \left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2\right)^q \left(\frac{\pi n}{l}\right)^p e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t_0}$

По признаку Далекарля сходится

Лекция №3. (Решивов)

$$Q_{LT} = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$$

$$\Gamma = \overline{Q_{LT}} \setminus Q_{LT}$$



Принцип максимального значения

Пусть функции $u(x, t)$ таковы, что $u(x, t) \in C[\overline{Q_{LT}}]$ и $u(x, t) \in C^{2,1}[Q_{LT}]$ и удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (x, t) \in Q_{LT}$$

$$\text{Тогда } \max_{\overline{Q_{LT}}} u(x, t) = \max_{\Gamma} u(x, t)$$

$$\min_{\overline{Q_{LT}}} u(x, t) = \min_{\Gamma} u(x, t)$$

Доказательство От противного. Пусть $m = \max_{\Gamma} u(x, t)$ и существует точка $(x_0, t_0) \in Q_{LT}$ такая, что $u(x_0, t_0) = M + \varepsilon$ $\varepsilon > 0$

$$v(x, t) : u(x, t) = v(x, t) + \frac{\varepsilon}{2T} (t - t_0)$$

$$v(x, t) = u(x, t) - \frac{\varepsilon}{2T} (t - t_0)$$

$$v(x, t) \in C[\overline{Q_{LT}}]$$

$$v(x, t) \in C^{2,1}[Q_{LT}]$$

$$\max_{\Gamma} v(x, t) \leq \max_{\Gamma} u(x, t) + \frac{\varepsilon}{2} = M + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$v(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) - 0 = M + \varepsilon$$

$$\text{Максимум } v(x, t) = v(x_1, t_1) \quad (x_1, t_1) \in Q_{LT}$$

$$(x_1, t_1) \in Q_{LT} \quad \begin{aligned} 0 < x_1 < l \\ 0 < t_1 \leq T \end{aligned}$$

$$v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

$$v_t(x_1, t_1) = \begin{cases} 0, & t_1 < T \\ > 0, & t_1 = T \end{cases}$$

$$u_t(x_1, t_1) = v_t(x_1, t_1) + \frac{\varepsilon}{2T} > 0 \Rightarrow (x_1, t_1) \in Q_{LT}$$

$$u_{xx}(x_1, t_1) = v_{xx}(x_1, t_1) \leq 0$$

Получили противоречие:

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$$

Противоречие. Докажем первую часть утверждения

Рассуждаем второй частью:

$$\text{Рассмотрим } v(x, t) = -u(x, t)$$

$$\min_{\overline{Q_{LT}}} u(x, t) = \max_{\overline{Q_{LT}}} v(x, t)$$

$$\min_{\Gamma} u(x, t) = \max_{\Gamma} v(x, t)$$

Лемма №3 Теорема единственности для
(Писовенков) линейного уравнения

II способ

$$E(t) = \int_0^l \frac{1}{2} v^2 dx$$

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l v_t v dx = \int_0^l a^2 v_{xx} v dx = a^2 v_x v \Big|_0^l - a^2 \int_0^l v_x^2 dx =$$

$$= -a^2 \int_0^l v_x^2 dx \leq 0$$

$$E(0) = 0$$

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \Rightarrow E(t) = 0$$

$$E(t) \geq 0$$

$$v(x, t) = 0$$

III способ.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v(0, t) = 0 \\ v(l, t) = 0 \\ v(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$\max_{0 \leq x \leq l, t \geq 0} v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq l, t \geq 0} v(x, t) = 0 \Rightarrow \boxed{v(x, t) = 0}$$

для
хребтов
уловов I
ряда

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(x, t), 0 < x < l \\ u|_{x=0} = \mu_1(t) \\ u|_{x=l} = \mu_2(t) \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

Вывод: если нетого решение перенесено

Докажем симметричность операторов L и A операторов L и A симметричны

$$(Lu, v) = (u, Lv)$$

$$\int_0^l u'' v dx = u' v \Big|_0^l - \int_0^l u v' dx = - \int_0^l v' u dx = -v' u \Big|_0^l + \int_0^l v u'' dx = \int_0^l v u'' dx$$

$$\int_0^l u'' v dx = \int_0^l u v'' dx$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}, 0 < x < l, t > 0$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u_t = \partial_x^2 u$$

$$u_t = \partial_x^2 u$$

$$u_{xx} = (\partial_{xx}^2 + 2\lambda \partial_x + \lambda^2 v) e^{\lambda x}$$

$$v_t = \partial_{xx}^2 v + 2\lambda \partial_x v + \lambda^2 v - \partial_x^2 v + \lambda \partial_x v$$

$$2\lambda + 1 = 0, \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$v_t = \partial_{xx}^2 v - \frac{1}{4} v$$

$$v(0, t) = 0$$

$$v(l, t) = 0$$

$$v(x, 0) = e^{\frac{x}{2}} \varphi(x)$$

Задача Саммарони - Кошкина, не всегда нестационарными
задачами можно превратить в стационарные

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = 0 \\ u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = x(x) T(t)$$

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = x(l)$$

$$x'' + \lambda x = 0$$

$$C \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} 0) = C \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l)$$

$$\cos(\sqrt{\lambda} l) = 1$$

$$\sqrt{\lambda} l = 2\pi n \rightarrow \lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2 \rightarrow x_n = \sin \frac{2\pi n x}{l}$$

$$x(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} x + C_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

$$l = \pi; \lambda_n = (2n)^2; x_n = \sin 2nx$$

② Решить задачу с граничными условиями однородными

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

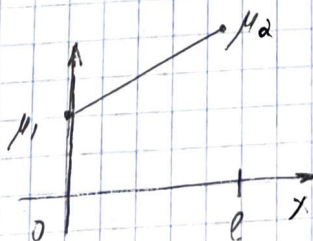
$$f = x^3 + x^2 y - y^2$$

$$f = x^2 + y^3 - \text{нет}$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \mu_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

$$\begin{cases} w(0, t) = \mu_1, \\ w(l, t) = \mu_2 \end{cases}$$



$$\omega = ax + b$$

$$\omega|_{x=0} = b = \mu_1$$

$$\omega|_{x=l} = al + b = \mu_2$$

$$\omega(x, t) = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} x + \mu_1$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = v_1(t) \\ u(l, t) = \mu_2(t) \end{cases}$$

$$u = v + \omega; \quad \omega = v_1(t)x + (\mu_2 - v_1)l$$

$$\begin{cases} u_x(0, t) = v_1(t) \\ u_x(l, t) = v_2(t) \end{cases}$$

$$u = v + \omega$$

$$\omega = ax^2 + bx$$

$$\omega_x(0, t) = b = v_1(t)$$

$$a = \frac{v_2 - v_1}{2l}$$

$$\omega_x(l, t) = 2al + v_1 = v_2$$

③ Найдем ч.з. и ч.р. операторов L , граничные ℓ_1, ℓ_2

$$Lx + \lambda x = 0$$

$$\ell_1 x|_{x=0} = 0$$

$$\ell_2 x|_{x=l} = 0$$

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0 \\ x(0) = 0 \\ x(l) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(x) &= \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ x(l) &= \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \\ \sqrt{\lambda}l &= \pi n \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \end{aligned}$$

$$x_n = \sin \frac{\pi n}{l} x$$

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, 0 < x < l \\ x'(0) = 0 \\ x(l) = 0 \end{cases}$$

$$x_n(x) = \cos x \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right), \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2l} (2n+1) \right)^2 \quad x_n = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l} x$$

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$$

$$u(x, 0) = \sin^3 x$$

$$x_n = \sin\left(\frac{x}{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right) = \sin((n+1)x)$$

$$\sin^3 x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin((n+1)x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin((n+1)x) e^{-t} = \frac{3}{4} \sin x e^{-t} - \frac{1}{4} \sin 3x e^{-t}$$

Είκοι ομοια αριθμητικά ζεύγητα:

$$u_t = \frac{a^2}{R^2} u_{\varphi\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(2\pi, t)$$

$$u_{\varphi}(0, t) = u_{\varphi}(2\pi, t)$$

$$u(\varphi, 0) = g(\varphi)$$

$$\Phi'' + \lambda \Phi = 0$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi)$$

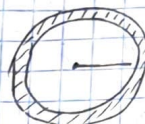
$$\Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

$$\lambda \geq 0$$

$$1) \lambda = 0$$

$$\Phi'' = 0$$

$$\Phi_0(\varphi) = 1$$



$$u(\varphi, t) = u(\varphi + 2\pi, t)$$

$$u(\varphi, t) = \Phi(\varphi) T(t)$$

$$2) \lambda > 0, \quad \Phi(\varphi) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} \varphi) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} \varphi)$$

$$c_1 \sqrt{\lambda} = c_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) - c_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi)$$

$$\begin{cases} c_1 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) + c_2 (\cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) - 1) = 0 \\ c_1 (\cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) - 1) - c_2 \sin(\sqrt{\lambda} 2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\sinh^2(\sqrt{\lambda} 2\pi) + (\cos(\sqrt{\lambda} 2\pi) - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{\lambda} 2\pi = 2\pi n, \quad \lambda = n^2$$

$$\begin{cases} c_1 \sin 2\pi n + c_2 (1 - 1) = 0 \\ c_1 (1 - 1) - c_2 \sin 2\pi n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1, c_2 = 0 \\ c_1 = 0, c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot 0 - c_2 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{cases}$$

$$④ \quad u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = Lv + \tilde{f}(x, t), & 0 < x < l, t > 0 \\ \tilde{L}_1 v|_{x=0} = 0 \\ \tilde{L}_2 v|_{x=l} = 0 \\ v|_{t=0} = \tilde{\varphi}(x) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) x_n(x) & f_n(t) &= \frac{1}{\|x_n\|^2} \int_0^l \tilde{f}(x, t) x_n(x) dx \\ \tilde{f}(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) x_n(x) & v_n &= \frac{1}{\|x_n\|^2} \int_0^l \tilde{\varphi}(x) x_n(x) dx \\ \tilde{\varphi}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n(x) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\partial v_n}{\partial t} + \lambda_n v_n - f_n(t) \right) x_n(x) = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) x_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n x_n(x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_n}{\partial t} + \lambda_n v_n = f_n(t) & v_n(t) = v_{n1}(t) + v_{n2}(t) \\ v_n(0) = v_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{n1}}{\partial t} + \lambda_n v_{n1} = 0 \\ v_{n1}(0) = v_n \end{cases}$$

$$v_{n1}(t) = v_n e^{-\lambda_n t}$$

Промежуточный случай

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2$$

$$x_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$v_n = \frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\varphi}(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx$$

$$v_{n1}(t) = v_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t}$$

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{l} \int_0^l \tilde{\varphi}(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \right) e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t} \sin \frac{\pi n x}{l} = \\ &= \int_0^l \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n y}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} e^{-\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 t} \right)}_{\text{ядро - ее источник}} \tilde{\varphi}(y) dy. \end{aligned}$$

1)

$$v_1 = \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} G(x, y, t) \bar{v}(y) dy$$

$$G(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}$$

$$\frac{\partial v_{n2}}{\partial t} + \lambda_n v_{n2} = f_n(t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{n2}}{\partial t} + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 v_{n2} = f_n(t) \\ v_{n2}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) &= f(t) \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} + ay = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + aU = 0 \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U^{(n)}(t) + a_1 U^{(n-1)}(t) + \dots = 0 \\ U(0) = 0, \dots, U^{(n-2)}(0) = 0 \\ U^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) &= f(t) \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$y(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t U(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{cases} U'' + \omega^2 U = 0 \\ U(0) = 0, U'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = e^{-t^2} \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U'' + \omega^2 U = 0 \\ U(0) = 0, U'(0) = 1 \end{cases}$$

$$U(t) = \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

$$y(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega \tau}{\omega} e^{-\frac{1}{2}(\tau-t)^2} d\tau$$

$$v_{n2}(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} f_n(t-\tau) d\tau$$

$$v_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_{n2}(t) \sin \frac{n\pi x}{l} = \int_0^t \dots \int_0^l G(x, y, t-\tau) \bar{v}(y, \tau) dy d\tau$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x, t) + w(x, t) = \int_0^l \int_0^t G(x, y, t-\tau) \bar{v}(y, \tau) dy d\tau + \int_0^t \int_0^l G(x, y, t-\tau) \bar{f}(y, \tau) dy d\tau \\ &+ w(x, t), \text{ where } G(x, y, t-\tau) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{l} e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} \end{aligned}$$

$$u_1(t) \quad \boxed{} \quad u_2(t)$$

$$u_i(x_0, t_0) = a^2 u_{xx}(x_0, t_0)$$

Теорема единственности первой краевой задачи

Пусть функции $u_i(x, t)$, $i=1, 2$ таковы, что $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_{\ell T}}]$

$$u_i(x, t) \in C^{2,1}[Q_{\ell T}] \cup$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T$$

$$u_i(0, t) = \mu_1(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(l, t) = \mu_2(t)$$

$$u_i(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\text{Тогда } u_1(x, t) = u_2(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_{\ell T}}$$

Рассуждение Рассмотрим $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$

$$u \in C[\overline{Q_{\ell T}}] \quad u \in C^{2,1}[Q_{\ell T}]$$

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u(0, t) = u_1(0, t) - u_2(0, t) = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\max_{\overline{Q_{\ell T}}} u(x, t) = \max_{\Gamma} u(x, t)$$

$\overline{Q_{\ell T}}$

Γ

$$\min_{\overline{Q_{\ell T}}} u(x, t) = \min_{\Gamma} u(x, t) = 0$$

$\overline{Q_{\ell T}}$

Γ

$$u(x, t) = 0 \quad \text{в } \overline{Q_{\ell T}}$$

Лемма Пусть $u_i(x, t)$ таковы, что $u_i(x, t) \in C[\overline{Q_{\ell T}}]$

$$u_i(x, t) \in C^{2,1}[Q_{\ell T}] \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T. \quad \text{Тогда}$$

если $u_1(x, t) \geq u_2(x, t)$ где $(x, t) \in \Gamma$, то

$$u_1(x, t) \geq u_2(x, t) \quad \text{где } (x, t) \in \overline{Q_{\ell T}}$$

Доказательство

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \quad u \in C(\overline{Q_{\ell, T}}), u \in C^{2,1}(Q_{\ell, T})$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T$$

$$\min_{\overline{Q_{\ell, T}}} u(x, t) = \min_{\Gamma} u(x, t) \geq 0$$

$$u(x, t) \geq 0 \quad \text{в } \overline{Q_{\ell, T}}$$

Теорема устойчивости. Пусть функции $u_i(x, t)$, $i=1, 2$, таковы,

что $u_i \in C(\overline{Q_{\ell, T}})$, $u_i \in C^{2,1}(Q_{\ell, T})$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T$$

$$u_i(0, t) = \mu_{i1}(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(\ell, t) = \mu_{i2}(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$\text{Тогда } \max_{\overline{Q_{\ell, T}}} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \max_{\Gamma} \left\{ \max_{[0, T]} |\mu_{11}(t) - \mu_{12}(t)|; \right.$$

$$\left. \max_{[0, T]} |\mu_{21}(t) - \mu_{22}(t)|; \max_{[0, \ell]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \right\}$$

Доказательство $u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t) \quad u \in C(\overline{Q_{\ell, T}})$

$$u \in C^{2,1}(Q_{\ell, T}), \quad \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} \\ u(0, t) = \mu_{11}(t) - \mu_{12}(t) \\ u(\ell, t) = \mu_{21}(t) - \mu_{22}(t) \\ u(x, 0) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \quad 0 \leq x \leq \ell \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$U^+(x, t) = \varepsilon \quad U^{+-}$$

$$U^-(x, t) = -\varepsilon$$

$$U^+(x, t) \in C(\overline{Q_{\ell, T}}), \quad U^{+-} \in C^{2,1}(Q_{\ell, T})$$

$$U_t = a^2 U_{xx}$$

$$u(x, t) \leq \varepsilon = U^+(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma$$

$$U^-(x, t) = -\varepsilon \leq u(x, t) \quad (x, t) \in \Gamma$$

$\Downarrow$

$$u(x, t) \leq \varepsilon, \quad (x, t) \in \overline{Q_{\ell, T}}$$

$$-\varepsilon \leq u(x, t), \quad (x, t) \in \overline{Q_{\ell, T}}$$

$$\max_{\overline{Q_T}} |u(x,t)| \leq \varepsilon \quad (x,t) \in \overline{Q_T}$$

Эквивалентность (линейных) систем уравнений задачи для функции
температуры

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \begin{matrix} 0 < x < l \\ 0 < t \leq T \end{matrix}$$

$$\alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = \theta_1(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = \theta_2(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

Температура α_i, β_i , т.е. $\alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \alpha_i + \beta_i > 0, i=1,2$

Теорема Пусть функции $u_i(x,t), i=1,2$, таковы, что

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x} \in C[\overline{Q_T}], \quad u_i \in C^{2,1}(Q_T)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} + f(x,t) \quad \begin{matrix} 0 < x < l \\ 0 < t \leq T \end{matrix}$$

$$\alpha_1 u_i(0,t) - \beta_1 \frac{\partial u_i}{\partial x}(0,t) = \theta_1(t)$$

$$\alpha_2 u_i(l,t) + \beta_2 \frac{\partial u_i}{\partial x}(l,t) = \theta_2(t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u_i(x,0) = \varphi(x) \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\text{Тогда} \quad u_1(x,t) = u_2(x,t) \\ \text{в } \overline{Q_T}$$

Доказательство $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$u, u_x \in C[\overline{Q_T}], \quad u \in C^{2,1}(Q_T)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ & 0 < t \leq T \end{cases}$$

$$\alpha_1 u(0,t) - \beta_1 u_x(0,t) = 0$$

$$\alpha_2 u(l,t) + \beta_2 u_x(l,t) = 0 \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$\int_0^l \int_0^t \left[2u(x, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} u(x, \tau) \right] d\tau dx = a^2 \int_0^t \int_0^l 2u(x, \tau) u_{xx}(x, \tau) dx d\tau$$

$$\int_0^l \int_0^t (u(x, \tau))^2 d\tau dx = 2a^2 \int_0^t \left[u_x(x, \tau) u(x, \tau) \Big|_0^l - \int_0^l (u_x(x, \tau))^2 dx \right] d\tau$$

$$(1) \int_0^l (u(x, t))^2 dx - \int_0^l (u(x, 0))^2 dx + 2a^2 \int_0^t \int_0^l (u_x(x, \tau))^2 dx d\tau - 2a^2 \int_0^t u(x, \tau) u_x(x, \tau) \Big|_0^l d\tau = 0$$

$$-2a^2 \int_0^t u(l, \tau) u_x(l, \tau) d\tau$$

$$u(l, \tau) u_x(l, \tau)$$

$$① d_2 = 0 \quad u_x(l, t) = 0$$

$$u(l, t) u_x(l, t) = 0$$

$$② d_2 > 0 \quad u_x(l, t) \left(-\frac{\beta_2}{d_2} \right) = u(l, t)$$

$$u(l, t) u_x(l, t) = -\frac{\beta_2}{d_2} (u_x(l, t))^2$$

$$2a^2 \int_0^t u(0, \tau) u_x(0, \tau) d\tau \quad \uparrow$$

$$① d_1 = 0 \Rightarrow u_x(0, \tau) = 0 \Rightarrow u(0, \tau) u_x(0, \tau) = 0$$

$$② d_1 > 0 \quad u(0, t) = \frac{\beta_1}{d_1} u_x(0, t)$$

$$u(0, t) u_x(0, t) = \frac{\beta_1}{d_1} (u_x(0, t))^2 \geq 0, \text{ возрастает к}$$

$$\int_0^l (u(x, t))^2 dx = 0 \Rightarrow u(x, t) = 0 \text{ в } \overline{Q_T}$$

Лемма N°4. (Рунд) (Рунд)

Задача Коши

Поставим $u(x, t)$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad -\infty < x < \infty \quad (1)$$

$$t > 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad , -\infty < x < \infty \quad (2)$$

$$\max |u(x,t)| \leq M$$

Определение Функция $u(x,t)$ называется реш. $\{$ Коши, если $u \in C(E \times \bar{E}^+)$, $u \in C^{2,1}(E \times E^+)$ и $u(x,t)$ удовн. (1), (2)

$$E = -\infty < x < \infty \quad E^+ = t > 0$$

$$u(x,t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} \varphi(s) ds, & x \in E, t > 0 \\ \varphi(x), & t = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Теорема существования Пусть функция $\varphi \in C(E)$

и $|\varphi(x)| \leq M \quad \forall x \in E$. Тогда функция $u(x,t)$ определенная формулой (3) такова что $u \in C(E \times \bar{E}^+)$, $u \in C^{2,1}(E \times E^+)$, удовн. ур-нию (1)

и пар. урн. (2)

До-во: $G(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\}$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,s,t) \varphi(s) ds.$$

$G(x,s,t)$ при интегрировании s является функцией ур-ния мен. - и при $t > 0, -\infty < x < \infty$

$$G_t(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \left(-\frac{1}{2t} \right) + \frac{1}{2t} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{t^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\}$$

$$G_x(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t} \right)$$

$$G_{xx}(x,s,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \left(\frac{4(x-s)^2}{4a^2 t} - \frac{2}{4a^2 t} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} e \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \right)$$

$$G_t(x,s,t) = a^2 G_{xx}(x,s,t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi} \quad |u(x,t)| \leq M$$

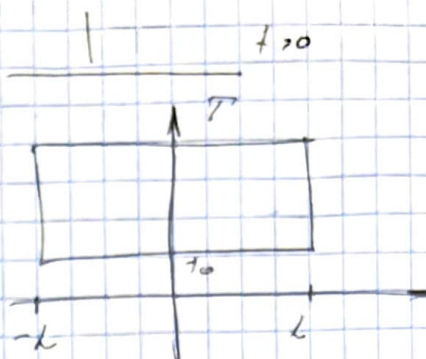
$$|u(x,t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right) |\varphi(s)| ds \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right) ds$$

$$\left(z = \frac{s-x}{\sqrt{4a^2 t}} \right) = M \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz = M$$

Докажем, что $u \in C^{2,1}(E \times E^+)$

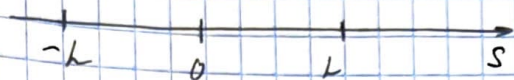
Вспомогательная

$$\Pi = \{(x, t) : |x| \leq L, 0 \leq t_0 < t \leq T\}$$



Докажем, что интеграл равномерно сходится в Π .

Вспомогательную $G(x, s, t)$ для $(x, t) \in \Pi$



$$G(x, s, t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}}, & |s| \leq L \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\left(-\frac{(L-s)^2}{4a^2 t_0}\right), & s > L \\ \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\left(-\frac{(L+s)^2}{4a^2 t_0}\right), & s < -L \end{cases}$$

Определена и непрерывна в Π .

$$u_t(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_t(x, s, t) \varphi(s) ds.$$

$$G_t(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t_0}\right) \left(-\frac{1}{2t_0}\right) + \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t_0}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t_0}\right) \left(\frac{(x-s)^2}{4a^2 t_0^2}\right)$$

$$|G_t(x, s, t)| \leq |G(x, s, t)| \cdot \left[\frac{1}{2t_0} + \frac{(L+|s|)^2}{4a^2 t_0} \right] = F(s) [] \leq$$

$$F_1(s), \forall s \in E$$

$$(x, t) \in \Pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(s) ds < \infty$$

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [G_t(x, s, t) \varphi(s) - a^2 G_{xx}(x, s, t)] ds = 0$$

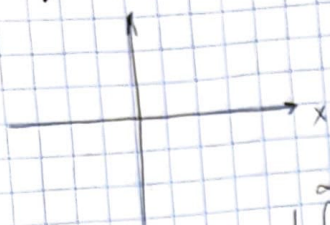
$u(x, t)$ определена и непрерывна для $x \in E, t > 0$

$u \in C^{2,1}(E \times E^+)$ и удовлетворяет уравнению в открытой области непрерывности

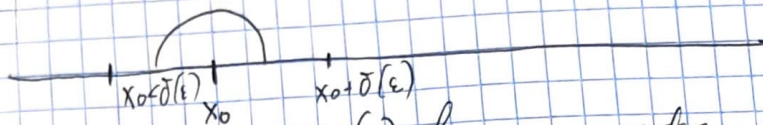
$$\max |u(x,t) - \varphi(x_0)| \leq \varepsilon$$

Показать, что $u(x,t)$ непрерывна в заданной области непрерывности.

$$\lim_{x \rightarrow x_0, t \rightarrow 0+} u(x,t) = \varphi(x_0)$$



$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s) ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(x_0) ds \right|$$



Из непрерывности $\varphi(x)$ в x_0 , ~~следует~~ следует, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \quad |x - x_0| < 2\Delta(\varepsilon)$$

$$(x - x_0)^2 + t^2 < \delta(\varepsilon)^2$$

$$|u(x,t) - \varphi(x_0)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s) ds - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(x_0) ds \right|$$

$$\exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(x_0) ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds +$$

$$+ \int_{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)}^{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds + \int_{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) |\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds$$

$$|\varphi(s) - \varphi(x_0)| ds \leq 2M \int_{-\infty}^{x_0 - 2\Delta(\varepsilon)} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) ds$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} + 2M \int_{x_0 + 2\Delta(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) ds$$

$$I_1 = 2M \int_{-\infty}^{\frac{x_0 - x - 2\Delta(\varepsilon)}{\sqrt{4a^2 t}}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \quad \exists \delta_1, \text{ m. t. } \delta(\varepsilon) < \delta_1, I_1 < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left(-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right) \varphi(s) ds$$

$$u(x,t) > 0 \quad \forall x \in E, t > 0$$

Требуется установить, имеет ли решение $u_i(x,t)$ место, что $u_i(x,t) \in C(E \times E^+)$ $u_i(x,t) \in C^{2,1}(E \times E^+)$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}(x,t) = 0 = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}(x,t) \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$u_i(x,0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$|u_i(x,t)| \leq M \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

$$\text{Тоже } u_1(x,t) = u_2(x,t) \quad \forall x \in E, t \in E^+$$

Доказательство

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

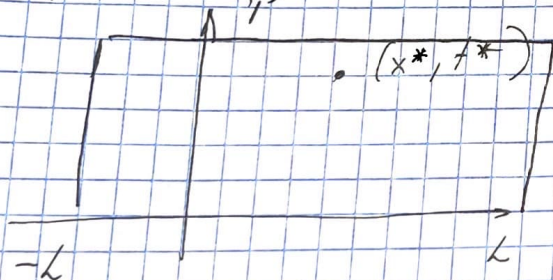
$$u \in C(E \times E^+), u \in C^{2,1}(E \times E^+)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad E \times E^+$$

$$u(x,0) = 0$$

$$|u(x,t)| \leq M \quad x \in E$$

$$\text{Требуется } \exists m. m. r. \quad u(x^*, t^*) = \varepsilon > 0 \quad t^* > 0$$



$$|x^*| < L$$

$$0 < t^* < T$$

$$w(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

$$w \in C[E^* \times E^+], w \in C^{2,1}[\Pi_L]$$

$$w_t = a^2 w_{xx} \quad \forall \Pi_L$$

$$\omega(x,0) = \frac{4M}{L^2} \frac{x^2}{2} \geq 0$$

$$\omega(\pm L, t) \geq 2M$$

$$u(x,0) = 0$$

$$|u(\pm L, t)| \leq 2M$$

$$|u(x,t)| \leq \omega(x,t), \quad (x,t) \in \mathcal{D}_L$$

$$|u(x^*, t^*)| \leq \omega(x^*, t^*) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{(x^*)^2}{2} + 0 \cdot t^* \right) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$$

$\xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0$

Задача №4 (Кисилев)

Задача Коши для уравнения параболического.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 (0 < t \leq T) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & u(x, t) = O^{2,1}(\rho \times [0, T]) \cap C(\rho \times [0, T]) \\ & u(x, t) < k e^{\rho |x|} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad |u(x, t)| < M$$

Теорема единственности

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

$$\begin{aligned} v_t &= a^2 v_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ v(x, 0) &= 0, \\ |v(x, t)| &\leq 2M \end{aligned}$$

$$v_t = a^2 v_{xx}, \quad -L = x \leq L$$

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right)$$

$$v(\pm L, t) = 2M + \frac{4Ma^2 t}{L^2}$$

$$v(0, 0) = \frac{4M \cdot x^2}{L^2 \cdot 2}$$

$$v(\pm L, t) \leq 2M < v(\pm L, t)$$

$$v(x, 0) = 0 < v(x, 0) \Rightarrow v(x, t) < v(x, t)$$

$$v(x, t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + a^2 t \right) \rightarrow 0 \quad x \rightarrow +\infty$$

$$v(x, t) = 0$$

Решаем:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda^2$$

$$X(x) = e^{\pm i\lambda x}$$

$$T(t) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$$

$$u_\lambda = A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x}, \quad -\infty < \lambda < +\infty$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

Не удалось право использовать принцип максимума, так как он для полноты

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y} dy, \text{ неограничен, непрерывен}$$

$$\text{или } \varphi(x) = 1 \Rightarrow u(x,t) = 1$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda x - i\lambda y} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda \right) \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy$$

$$G(x,y,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t + i\lambda(x-y)} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left(\lambda^2 - 2\lambda \frac{i(x-y)}{2a^2 t} + \left(\frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2 - \left(\frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2 \right)} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left(\lambda - \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2} e^{-\frac{a^2 t (x-y)^2}{4a^4 t^2}} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 t \left(\lambda - \frac{i(x-y)}{2a^2 t} \right)^2} d\lambda \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

$$p = \lambda - \frac{i(x-y)}{2a^2 t}; d\lambda = dp$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - i0}^{+\infty - i0} e^{-a^2 t p^2} dp$$

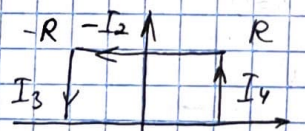
$$dp \sqrt{a^2 t} = z; dp = \frac{dz}{\sqrt{a^2 t}}$$

$$I = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \int_{-\infty - i0}^{+\infty - i0} e^{-z^2} dz$$

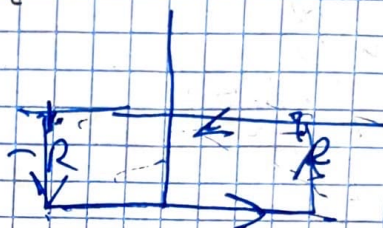
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$f(z) = e^{-z^2}$$

$$\oint e^{-z^2} dz = 0 = I_1 + I_4 - I_2 + I_3 \Rightarrow I_1 = I_2$$



$$G(x,y,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$



$$\oint e^{-z^2} dz = 0$$

$$\int_{-\infty - i0}^{+\infty - i0} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

II член (уменьшаемая часть)

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x' = kx; \quad t' = k^2 t$$

$$u_t = u_{t'} \cdot k^2$$

$$u_{xx} = u_{x'x'} \cdot k^2$$

$$u_{t'} = a^2 u_{x'x'}$$

$$u(kx, k^2 t) = u(x, t)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0; \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\ |u| < M \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}; \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = u_0 f(z)$$

$$u_t = u_0 f'(z) \frac{x}{2} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^{3/2}}\right) = -u_0 f'(z) \frac{x}{4t^{3/2}}$$

$$u_{xx} = u_0 f''(z) \frac{1}{4t}$$

$$-u_0 f'(z) \frac{x}{4t^{3/2}} = u_0 f''(z) \frac{1}{4t} a^2$$

$$-f' \frac{x}{4t^{3/2}} = f''(z) a^2$$

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -\frac{2z}{a^2} \frac{df}{dz}, \text{ при } t=0, \text{ то}$$

$$\left. \frac{x}{2\sqrt{t}} \right|_{\substack{x>0 \\ t=0}} = +\infty$$

$$\left. \frac{x}{2\sqrt{t}} \right|_{\substack{x<0 \\ t=0}} = -\infty$$

$$\frac{df}{dz} = g(z)$$

$$\frac{dg}{dz} = -\frac{2z}{a^2} g$$

$$\frac{dg}{g} = -\frac{2z}{a^2} dz$$

$$g(z) = C e^{-\frac{z^2}{a^2}}$$

$$f(z) = C \int_{-\infty}^z e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz$$

$$f(-\infty) = 0$$

$$f(+\infty) = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{a^2}} dz = C a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = C a \sqrt{\pi} = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{a\sqrt{\pi}}$$

$$f(z) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{p^2}{a^2}} dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-q^2} dq = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-q^2} dq + \int_0^{\frac{z}{a}} e^{-q^2} dq \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{z}{a} \int_0^{\frac{z}{a}} e^{-q^2} dq \right)$$

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{z}{a}\right) \right)$$

$$u(x,t) = u_0 f\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right)$$

$$w = \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \quad w_t = a^2 w_{xx}$$

$$w|_{t=0} = 1$$

$$t > 0$$

$$x > 0$$

$$w|_{x=0} = 0$$

$$t > 0$$

$$\textcircled{2} u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) \right)$$

$$\textcircled{3} u(x,0) = \begin{cases} 0, & x > x_2 \\ u_0, & x_1 < x < x_2 \\ 0, & x < x_1 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right) \right)$$

$$u(x,t) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{u_i}{2} \left(\Phi\left(\frac{x-x_i}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-x_{i+1}}{2a\sqrt{t}}\right) \right)$$

$$\varphi_i(y) = \begin{cases} u_i, & x_{i-1} < y < x_i \end{cases}$$

$$\Phi\left(\frac{x-y}{2a\sqrt{t}}\right) \Big|_{y=x_1} - \Phi\left(\frac{x-y}{2a\sqrt{t}}\right) \Big|_{y=x_2} \quad dy = x_{i+1} - x_i \quad \Delta = -\frac{\partial}{\partial y} \Phi\left(\frac{x-y}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\varphi(y)}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \Phi\left(\frac{x-y}{2a\sqrt{t}}\right) \right) dy$$

$$\Phi(x) = \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-q^2} dq$$

$$\Phi(-x) = -\Phi(x)$$

$$\Phi(+\infty) = 1, \Phi(-\infty) = -1$$

$$\Phi'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2}$$

$$\nabla \left(a^2 \left(\frac{1}{2a\sqrt{t}} \right) e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-1x}{2 \cdot 2a\sqrt{t}^{3/2}} \right) \right) =$$

$$\textcircled{2} u_t = a^2 u_{xx} \quad \frac{a^2}{4a^2 t} e^{-\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{-2x}{2a\sqrt{t}} \right)$$

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_0, & x > x_1 \\ 0, & x < x_1 \end{cases}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x-y}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2} dp \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \cdot \frac{1}{2a\sqrt{t}} = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \sin x \end{cases}$$

$$u|_{t=0} = \sin x$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \sin y dy$$

$$\begin{cases} u(x,t) = \sin x \cdot g(t) \\ g'(t) = -a^2 g \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

$$g(t) = e^{-a^2 t} \quad u(x,t) = e^{-a^2 t} \sin x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2 t}} y dy$$

$$\leftarrow \begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = x \end{cases}$$

$$\frac{y-x}{2a\sqrt{t}} = p; dy = 2a\sqrt{t} dp \quad y = 2a\sqrt{t}p + x$$

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} (2a\sqrt{t}p + x) dp = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = x$$

Задание №5 (Постановка)

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{t}} = \lim_{y \rightarrow 0+0} (e^{-\frac{y^2}{4t}} \cdot y) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{4t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}} dy = \left[\frac{y-x}{2\sqrt{4t}} = p; dy = 2\sqrt{4t} dp \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2} dp = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \end{cases}$$

$$\rho(M) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

$\bar{D} = \{\varphi\}$ - набор базисных функций

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x) x^k dx = M_k$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \varphi_k(x) dx$$

$$\delta_h(x) = C e^{-hx^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(x) dx = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \delta_h(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$$G(x,y,t) \Big|_{t=0} = \delta(x-y)$$

Аналогично получаем, что $\frac{\partial u}{\partial t} \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial t} \varphi(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{4t}} \left(-\frac{1}{2t} + \frac{p^2}{t} \right) \varphi(2\sqrt{4t}p+x) dp$

$$|\varphi(2\alpha\sqrt{t}p+x)| < M$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial G}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \right) \varphi(y) dy = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(x,t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-p^2 t} \lim_{t \rightarrow 0+0} \varphi(2\alpha\sqrt{t}p+x) dp = \varphi(x)$$

Требуется установить...

$$\text{Если } |\varphi| < \varepsilon, \text{ то } |u(x,t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t) \varphi(y) dy \right| < \varepsilon.$$

Несогласовное уравнение трансформируется

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, t > 0$$

$$u|_{t=0} = 0$$

$$|u| < M$$

$$u(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,y,t-\tau) f(y,\tau) dy$$

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} + \cos x e^{-t}$$

$$(u|_{t=0} = 0$$

$$u(x,t) = g(t) \cos x$$

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt} = -\alpha^2 g + e^{-t} \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Задача для полубесконечной области

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad 0 < x, t < +\infty, \\ \begin{cases} u_x|_{x=0} = v(t) - \text{краевое условие 2 рода} \\ u(0,t) = \mu(t) \end{cases} \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ |u| < M \end{cases} \quad u_x - h u|_{x=0} = -h \theta(t), \text{ III род.}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x, t \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \Phi(x) \end{cases}$$

Еще $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

$$u(x, t) = U(x, t) \Big|_{x=0} = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$$

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy + \int_{-\infty}^0 G(x, y, t) (-\varphi(-y)) dy =$$

$$= [-y = \beta]$$

$$\int_0^{+\infty} G(x, y, t) \varphi(y) dy - \int_0^{+\infty} G(x, -\beta, t) \varphi(\beta) d\beta =$$

$$= \int_0^{+\infty} (G(x, y, t) - G(x, -y, t)) \varphi(y) dy = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} - \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}} \right) \varphi(y) dy$$

$$\varphi(y) dy$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < +\infty \\ u_x|_{x=0} = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, & -\infty < x < +\infty \\ U|_{t=0} = \varphi(x) \end{cases}$$

Еще $\varphi(-x) = \varphi(x)$, тогда $\frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{x-y}{4a^2 t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} \Big|_{x=0} dy =$

$$= - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \frac{y}{4a^2 t} e^{-\frac{y^2}{4a^2 t}} \varphi(y) dy = 0$$

$$u(x, t) = U(x, t) = \int_0^{+\infty} (G(x, y, t) + G(x, -y, t)) \varphi(y) dy$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty \\ u(0, t) = 0 \\ u(x, 0) = T \end{cases}$$

$$u(x, t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4a^2 t}} T dy - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x+y)^2}{4a^2 t}} T dy = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-p^2} dp - \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-p^2} dp =$$

$$\frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-p^2} dp = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2} dp = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2} dp = T \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, 0 < x, t < +\infty \\ u(0, t) = 1 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$v_1(x, t) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$u(0, t) = \mu_0 \quad u(x, t) = \mu_0 v_1(x, t)$$

$$u(x, t) = \mu_0 (v_1(x, t) - v_1(x, t - t_1)) + \mu_1 (v_1(x, t - t_1) - v_1(x, t - t_2)) +$$

$$+ \mu_{n-2} (v_1(x, t - t_{n-2}) - v_1(x, t - t_{n-1})) + \mu_{n-1} v_1(x, t - t_{n-1})$$

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i \left(\frac{\partial v_1}{\partial t}(x, t - \tau_i) \right) \tau_i + \mu_{n-1} v_1(x, t - t_{n-1})$$

$$\lim_{t \rightarrow t_{n-1} \rightarrow 0} v_1(x, t - t_{n-1}) = 0$$

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial v_1}{\partial t}(t - \tau) \mu(\tau) d\tau$$

$$v_1 = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \left(-\frac{1}{4a^2 t^{3/2}}\right)$$

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau) d\tau$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Lu, 0 < x, t < +\infty \\ u|_{x=0} = \mu(t) \\ u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\vec{U} = L\vec{V}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}|_{x=0} = 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{U}|_{t=0} = 0 \end{array} \right.$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x, y, z) = u(x, y, z), \text{ mo}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = f \text{ in } \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u|_{\partial\Omega} = g(p) \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = h(p) \quad \frac{\partial u}{\partial n} = (\text{grad } u \cdot \vec{n})$$

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{grad } u$$

$$\text{div}(\text{grad } u) = 0$$

$$\Delta u = 0$$

Задача № 6 (Таблица 3)

$$\text{rot } \vec{v} = 0;$$



Задача электростатики

$\vec{D}$ - электрическое смещение

$\vec{E}$ - напряженность электрического поля

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{rot } \vec{E} = 0 \quad \vec{E} = -\text{grad } u$$

$$\text{если } \rho = \rho_0 = \text{const}$$

$$\text{div } \vec{D} = 0$$

$$\Delta u = 0$$

$$\vec{D}_n / \partial \Omega = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial n} / \partial \Omega = 0$$

$$\vec{D} /_{x=\pm\infty} = \vec{D}_0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} /_{x=\pm\infty} = u_0$$

$$\begin{cases} \Delta u = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \\ u / \partial \Omega = u_0(\rho) \end{cases}$$

$$\rho \in \partial \Omega$$

$$\Delta u = \text{div}(\text{grad } u), \text{ если } u = (x, y, z), \text{ то } \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

$$\text{если } \Delta u = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow u(x) = C_1 x + C_2$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u = Cxy, \quad C, x, y, x^2 - y^2.$$

$$n=2.$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \text{ если } u(r, \varphi) = u(r), \text{ то}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0; \quad r \frac{du}{dr} = C, \quad u(r) = C_1 \ln r + C_2$$

$u(r) = \ln \frac{1}{r}, \quad r \neq 0$, фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоскости.

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = \Delta u + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta, \varphi} u$$

$$\Delta_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u)$$

$$\Delta_r u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} (r u_{rr} + 2 u_r) = 4 r r + \frac{2}{r} 4 r$$

$$\Delta u(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r u) \right) = 0$$

$$r u = c_1 r + c_2, \quad r \neq 0$$

$$u(r) = c_1 + \frac{c_2}{r}; \quad u(r) = \frac{1}{r}, \quad r \neq 0, \quad u(r, \theta, \varphi) = u(r)$$

Решения Трени

$$\iiint_D \operatorname{div} \vec{A} d\vec{r} = \sum \iint_{S_i} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{A} = C^1(\bar{D})$$

$$\vec{A} \in C(\bar{D})$$

$$\iiint_D u \nabla v d\vec{r} = \iint_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iint_D \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v d\vec{r}$$

$$u, v \in C^2(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D})$$

$$\vec{A} = u \operatorname{grad} v \quad A_n = u \frac{\partial v}{\partial n}$$

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) + (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$$

$$\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) = \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) = u \Delta v + (\nabla u, \nabla v)$$

$$\iiint_D u \Delta v d\vec{r} = \sum \iint_{S_i} u \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma - \iiint_D (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) d\vec{r} \quad \text{I формула Трени}$$

$$\iiint_D v \Delta u d\vec{r} = \sum \iint_{S_i} v \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iiint_D (\operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u) d\vec{r}$$

$$\iiint_D (u \Delta v - v \Delta u) d\vec{r} = \sum \iint_{S_i} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \quad \text{II формула Трени}$$

III формула Трени

$$U(M_0, M) = \frac{1}{R_{M_0 M}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}}, \quad \Delta_M \frac{1}{R_{M_0 M}} = 0, \quad M \neq M_0$$

$\odot_{M_0} \cdot M$

K_E — шар с центром в M_0 и радиусом R
 $M \neq M_0$

17.

18.

$$\iiint_{\Sigma \setminus K_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R_{M_0, H}} - \frac{1}{R_{M_0, H}} \Delta u \right) d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) - \frac{1}{R_{M_0, H}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\tau$$

$$+ \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) - \frac{1}{R_{M_0, H}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\tau$$

$$u_0 \sum_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = - \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$$

$$\frac{1}{R_{M_0, H}} \Big|_{\Sigma_\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$$

111. (1)

$$- \iiint_{\Sigma \setminus K_\varepsilon} \frac{1}{R_{M_0, H}} \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) - \frac{1}{R_{M_0, H}} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\tau + \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{1}{\varepsilon^2} \varepsilon^2 d\Omega -$$

$$- \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{\varepsilon} \varepsilon^2 d\Omega$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\Omega = 4\pi u^*(M_0)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varepsilon d\Omega = 0$$

$$4\pi u(M_0) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{M_0, H}} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\tau - \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) d\tau - \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\tau$$

$$2) M_0 \in \Sigma \quad 2\pi u(M_0) = \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{M_0, H}} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\tau - \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) d\tau - \iint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\tau.$$

Case $\Delta u = 0$, m.o.

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{1}{R_{M_0, H}} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\tau - \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} u \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) d\tau$$

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} \frac{u(p)}{R_{M_0, H}} d\tau + \iint_{\Sigma} v(p) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) d\tau$$

$$v(M_0) = \iint_{\Sigma} \frac{u(p)}{R_{M_0, H}} d\tau - \text{вспомогательная функция, т.к. } \Delta \frac{1}{M_0 R_{M_0, H}} = 0$$

$$w(M_0) = \iint_{\Sigma} v(p) \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{R_{M_0, H}} \right) d\tau = 0$$

В плоской области

$$2\pi u(M_0) = \int_C \ln\left(\frac{1}{R_{M_0, \tau}}\right) \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau - \int_C u \frac{\partial}{\partial \tau} \ln\left(\frac{1}{R_{M_0, \tau}}\right) d\tau - \iint_D \Delta u \ln \frac{1}{R_{M_0, \tau}} d\tau$$

1) $M_0 \in D$

2) $M_0 \in C$

$2\pi u(M_0) =$

3) $M_0 \notin D$

$0 =$

Обсуждение граничных условий

Если $\Delta u = 0$ в D и $u \in C^1(\bar{D})$, то $\iint_D \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau = 0$

Доказано: Пограничные $u = 1$

$$\iint_D (u \Delta 1 - 1 \Delta u) d\tau = \iint_D u \frac{\partial}{\partial \tau} - 1 \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau =$$

$$0 = - \iint_D \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, M \in D \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\Sigma} = g(p) \end{cases} \quad u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$$

$$\iint_D g(p) d\tau = 0$$

$$\begin{cases} \Delta u = 0, x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{x^2 + y^2 = 1} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u = -f, M \in D \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\Sigma} = g \end{cases}$$

$$\iint_D f d\tau + \iint_{\Sigma} g d\tau = 0$$

$$\iint_D f d\tau + \iint_{\Sigma} g d\tau = 0$$

② Если $\Delta u = 0$

$S(M_0)$ - область, генерируемая перемещением δ отрезка D , то

$$R_{M_0, M} \Big|_{\delta} = \frac{1}{\delta}; \quad - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{R_{M_0, M}} \Big|_{\delta} = \frac{1}{\delta^2}$$

$$4\pi u(M_0) = \underbrace{\frac{1}{\delta} \iint_{S_\delta} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma}_{\stackrel{!}{=}} + \frac{1}{\delta^2} \iint_{S_\delta}$$

③ Если $u(n)$ задана во всей области

тогда $u(M_0) =$



Во всех n



Согласно

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 \\ u_1 \Big|_{\Sigma} = g_1 \\ \Delta u_2 = 0 \\ u_2 \Big|_{\Sigma} = g_2 \end{cases}$$

Если u

Тогда

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u \Big|_{\Sigma} = g \end{cases}$$

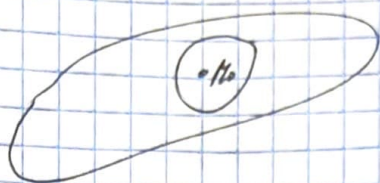
③ Если $u(p)$ достигает своего максимального и минимального значений во внутренней точке m_0 , то это значение достигается на границе.

Пусть $u(m_0) = \max_{\bar{D}} u(m)$

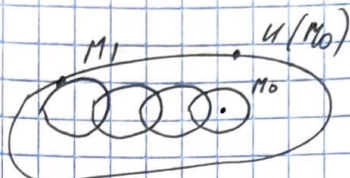
В точках сферы S_ρ $u(m) \leq u(m_0)$

$$u(m_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \int_{S_\rho} u(m) d\sigma \leq u(m_0)$$

$$u(m) \leq u(m_0)$$



Во всех точках сферы $u(m) \equiv u(m_0)$



Алгоритм из принципа максимума

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{в } D \\ u_1|_{\Sigma} = g_1(p) \\ \Delta u_2 = 0 & \text{в } D \\ u_2|_{\Sigma} = g_2(p) \end{cases}$$

Если $g_1 \leq g_2$, то $u_1 \leq u_2$ в D

$$\begin{cases} u = u_2 - u_1; \\ \Delta u = 0; \\ u|_{\Sigma} = g = g_2 - g_1 \geq 0 \end{cases}$$

Если $\Delta u = 0$

Постановка основной краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } D \\ u|_{\Sigma} = g(p) \\ u \in C^2(\bar{D}) \cap C(\bar{D}) \end{cases}$$

- задача Дирихле

задача Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = h(p) \\ u \in C^2(\bar{D}) \cap C^1(\bar{D}) \end{cases}$$

Задача N°5. (Дураков)

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \varphi(s) ds$$

$$G(x, s, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\}$$

Рассмотрим задачу на полуоси

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & x > 0 & (1) \\ u(0, t) = 0, & t > 0 & (2) \\ u(x, 0) = \varphi(x) & & (3) \end{cases}$$

Решаем. Попробуем. Проверим.

Определим функцию $u(x, t)$ из условия задачи (1) - (3), если $u(x, t) \in C(\bar{E}^+ \times E^+)$

$u(x, t) \in C^{2,1}(E^+ \times E^+)$, $u(x, t)$ удовлетв. (1) - (3)

Требуется найти u единств. Пусть $\varphi(x)$ такова, что $\varphi(x) \in C(\bar{E}^+)$, $\varphi(0) = 0$, $|\varphi(x)| \leq M$ для $x \in \bar{E}^+$. Тогда существует единственное решение $u(x, t)$ таковое, что $u(x, t) \in C(E^+ \times \bar{E}^+)$

$u(x, t) \in C^{2,1}(E^+ \times E^+)$, $|u(x, t)| \leq M$, $\forall (x, t) \in (\bar{E}^+ \times \bar{E}^+) \cup$

$u(x, t)$ удовлетв. (1), (2), (3)

Реш-во. Рассмотрим $\begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases} = \Phi(x)$

$\Phi(x) \in C(E)$, $|\Phi(x)| \leq M$

Рассмотрим q -ую $v(x, t)$ экв. пар. з. Коши

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} \\ v(x, 0) = \Phi(x) \end{cases} \quad \exists! \quad v(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp \left\{ -\frac{(x-s)^2}{4a^2 t} \right\} \Phi(s) ds$$

Рассуждения $u(x,t) = U(x,t) \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ t \geq 0 \end{matrix}$
 1) $u(x,t) \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$ 2) $u \in C^{2,1}(E^+ \times E^+)$
 3) $u(x,0) = U(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x)$

$$|u(x,t)| \leq M \quad (x,t) \in (\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$$

$$|\Phi(x)| \leq M \rightarrow |U(x,t)| \leq M \rightarrow |u(x,t)| \leq M$$

$$3) \quad u(x,0) = U(x,0) = \Phi(x) = \varphi(x)$$

$$u(0,t) = U(0,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2 t}} \exp\left\{-\frac{s^2}{4\alpha^2 t}\right\} \Phi(s) ds = 0$$

$\underbrace{\quad}_{\text{вероятность}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{вероятность}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{вероятность}}$

Единственность Пусть $u_i(x,t) \quad i=1,2$, тогда это
 $u_i(x,t) \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$, $u_i \in C^{2,1}(E^+ \times E^+)$ $|u_i(x,t)| \leq M, (x,t) \in (\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$
 и u_i удовн. (1)-(3). По-этому, что $u_1(x,t) = u_2(x,t)$

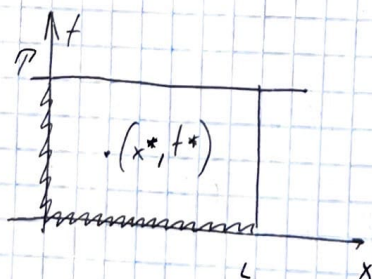
Рассмотрим $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

$$|u(x,t)| \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+), \quad |u(x,t)| \leq 2M, \quad (x,t) \in (\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$$

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & x > 0, t > 0 \\ u(0,t) = 0, t > 0 \\ u(x,0) = 0 & x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Пусть } \exists m. (x^*, t^*) \in (E^+ \times E^+) \\ u(x^*, t^*) = \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим $w(x,t) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{x^2}{2} + \alpha^2 t\right) \quad w \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+), \quad w(x,t) \in C^{2,1}(E^+ \times E^+)$

$$w_t = 0^2 w_{xx} \quad \begin{matrix} x \geq 0 \\ t \geq 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} w(x,0) \geq 0, & x \geq 0 \\ w(0,t) \geq 0, & t \geq 0 \end{matrix}$$



$$\Pi_L = \{(x,t), 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq P\}$$

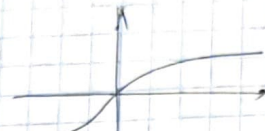
$$|u(L,t)| \leq 2M \quad |u(L,t)| \leq w(L,t)$$

$$w(L,t)$$

$$\varepsilon = U(x^*, t^*) \leq W(x^*, t^*) = \frac{4M}{L^2} \left(\frac{(x^*)^2}{2} + 0^2 t^* \right)$$

$L \rightarrow +\infty$, значит, искомая функция равномерно убывает.

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} u(x,t) = U(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \\ &\quad (-\varphi(-s)) ds = \dots \end{aligned}$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \varphi(s) ds$$

2 крайные задачи на непрерывность.

$$u_x(0,t) = 0 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ t > 0 \end{matrix} \quad (4)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad x > 0 \quad (5)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq 0 \quad (6)$$

Теорема Пусть $\varphi \in C(\bar{E}^+)$, $|\varphi(x)| \leq M$, $\forall x \geq 0$. Тогда

существует $u(x,t)$, м.з.

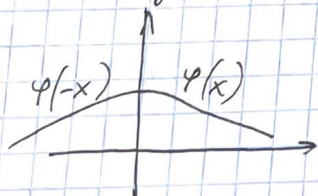
$$u \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+) \cap C^{2,1}(E^+ \times E^+)$$

$$|u(x,t)| \leq M, \quad (x,t) \in (\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$$

$u(x,t)$ удовн. (4)-(6).

Доказательство Рассмотрим $\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ \varphi(-x), & x \leq 0 \end{cases}$

Рассмотрим $U(x,t)$, м.з.



$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx} & -\infty < x < \infty \\ U(x,0) = \Phi(x) & t > 0 \end{cases}$$

$$\exists U(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds.$$

$U \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$ *уравн. упр-мие при $t > 0$.*

$$u(x,t) = U(x,t) \quad \begin{matrix} x > 0 \\ t > 0 \end{matrix}$$

$$u \in C(\bar{E}^+ \times \bar{E}^+), u \in C^{2,1}(E^+ \times E^+)$$

$$|u(x,t)| \leq M \in (\bar{E}^+ \times \bar{E}^+)$$

$$u_x(0,t) = U_x(0,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \left(-\frac{2(x-s)}{4a^2 t}\right) \Phi(s) ds \Big|_{x=0} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{s^2}{4a^2 t}\right\} \left(\frac{s}{2a^2 t}\right) \Phi(s) ds = 0$$

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \Phi(s) ds = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(s) ds +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \exp\left\{-\frac{(x-\tilde{s})^2}{4a^2 t}\right\} \varphi(-\tilde{s}) d\tilde{s}$$

$$s = -\tilde{s}$$

$$u(x,t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi a^2 t}} \left[\exp\left\{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}\right\} + \exp\left\{-\frac{(x+s)^2}{4a^2 t}\right\} \right] \varphi(s) ds \quad \text{2 кр. загары}$$

Умноженное представление загары на отрезке

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & 0 < x < l \\ & t > 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(s) \sin \frac{\pi n s}{l} ds \exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,s,t) \varphi(s) ds \quad G(x,s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin \frac{\pi n x}{l} \exp\left\{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t\right\} \sin \frac{\pi n s}{l}$$

$$\sin \frac{\pi n s}{l} \quad t > 0$$

1. кр. заг. на отрезке

$$① \quad G(x, s, t) = G(s, x, t)$$

$$② \quad G_t = a^2 G_{xx} \quad t > 0$$

$$③ \quad G(x, s, t) \geq 0 \quad (x, s) \in [0, l] \quad t > 0$$

задача Коши

$$① \quad G(x, s, t) = G(s, x, t)$$

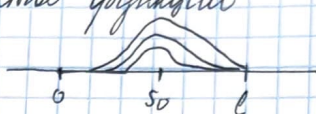
$$② \quad G_t = a^2 G_{xx} \quad t > 0$$

$$③ \quad G(x, s, t) \geq 0 \quad (x, s) \in E^2 \quad t$$

Докажем, что $G(x, s, t)$ — Φ
неотрицательная при $t > 0, x, s \in [0, l]$

Рассмотрим семейство функций

$$\int_0^l \varphi_\varepsilon(s) ds = 1$$



$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} = 0^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x^2}$$

$$u_\varepsilon(0, t) = 0$$

$$u_\varepsilon(l, t) = 0 \quad t > 0$$

$$u_\varepsilon(x, t) = \int_0^l G(x, s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds = \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} G(x, s, t) \varphi_\varepsilon(s) ds = G(x, s^*, t) \cdot$$

$$\cdot \int_{s_0 - \varepsilon}^{s_0 + \varepsilon} \varphi_\varepsilon(s) ds = 1 \quad s^* \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x, t) = G(x, s_0, t)$$

$$\min_{Q_{\varepsilon t}} u_\varepsilon(x, t) = G(x, s_0, t) \geq 0$$

Лекция №6 (Решив)

$$u(x, y, z, t)$$

$$u_t = a^2 \Delta u + F(x, y, z)$$

$$u(x, y, z)$$

$$u(x, y, z)$$

$$a^2 \Delta u = -F(x, y, z)$$

Стационарное уравнение теплопроводности.

$$\Delta u = -\frac{F(x, y, z)}{a^2}$$

Δu - оператор Лапласа

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{F(x, y, z)}{a^2} \\ \text{уравнение Пуассона} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \\ \text{уравнение Лапласа} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{c} E^3 \\ \Omega \\ p(x, y, z) \end{array}$$

$\Delta u = -4\pi\rho(x, y, z)$ ур-ие Пуассона

$\Delta u = 0$ ур-ие Лапласа

$u(x, y, z)$, например зависит только от x, y .

ур-ие Пуассона в E^2 $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$

ур-ие Лапласа в E^2 $u_{xx} + u_{yy} = 0$

Фундаментальные решения ур-ие Лапласа в E^3

$$M(x, y, z) = M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

Фундаментальное решение ур-ие Лапласа: $\frac{1}{R_{MM_0}}$

$$\Delta \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = 0 \quad \forall M \neq M_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = -\frac{1}{2 \cdot R_{MM_0}^3} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = \frac{3}{2} \frac{2(x-x_0)^2}{R_{MM_0}^5} - \frac{1}{R_{MM_0}^3}$$

$$\Delta \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{R_{MM_0}} \right) =$$

$$= \frac{3((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)}{R_{MM_0}^5} - \frac{3}{R_{MM_0}^3} = 0$$

Фундаментальный потенциал отрицательного заряда в точке M_0

Фундаментальное решение ур-ния Лапласа на плоскости

$$M(x, y) \quad M_0(x_0, y_0)$$

$$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$$

Фундамент. реш. ур-ния Лапласа в E^2

$$\Delta \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = 0 \quad \forall M \neq M_0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln r_{MM_0} \right) = - \frac{(x-x_0)}{r_{MM_0}^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = 2 \frac{1}{r_{MM_0}^3} \frac{1}{2} \frac{1}{r_{MM_0}} 2(x-x_0)^2 - \frac{1}{r_{MM_0}^2}$$

$$\Delta \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = 0$$

$$* \quad \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = - \frac{2(x-x_0)}{2 r_{MM_0}^3}$$

$$= - \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x-x_0)}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{3/2}}$$

$$\left(\frac{1}{r_{MM_0}^2} \right)'_x = - \frac{2(x-x_0)}{r_{MM_0}^4}$$

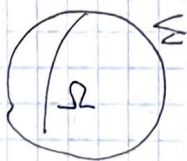
E^3 Потенциалы в нр-ве

$$\ln \frac{1}{r_{MM_0}}$$

Потенциал линии бесконечной

$E^3 \quad \Omega$ сф. пов. Σ

В сферическом



да в
ности.

E^2 обл. D , ограниченная кривой L



- Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа

Найти $u(x, y, z)$

$$\Delta u = 0$$

$(x, y, z) \in D$ — открытое

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

- Внутренняя задача Дирихле для уравнения Лапласа в E^2

$$\Delta u = 0, (x, y) \in D$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in D.$$

- Внешняя задача Дирихле в E^3
Найти функцию $u(x, y, z)$

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \Sigma$$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

- Внешняя задача Дирихле в E^2

Найти функцию $u(x, y)$

$$\Delta u = 0, (x, y) \in E^2 \setminus D$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in L$$

- Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в E^3
Найти $u(x, y, z)$

$$\Delta u = f(x, y, z), (x, y, z) \in D$$

$$u(x, y, z) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

Внутренняя задача Неймана в E^3 для уравнения Лапласа

Найти $u(x, y, z)$, т.е.,

$$\Delta u = 0, (x, y, z) \in D$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

- Внутренняя задача Дирихле в E^2
 $\Delta u = 0, (x, y) \in D$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in L$$

- Внешняя задача Дирихле в E^3
 Найти $u(x, y, z)$, м.з.
 $\Delta u = 0, (x, y, z) \in E^3 \setminus \overline{\Omega},$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma$$

- Внешняя задача Дирихле в E^2
 Найти $u(x, y)$, м.з.
 $\Delta u = 0, (x, y) \in E^2 \setminus \overline{D}$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \psi(x, y), (x, y) \in L$$

$u(x, y), \Delta u = 0, u_{xx} + u_{yy} = 0$ уравнение Лапласа.

Формулы Грина в E^3

Теорема Остроградского - Гаусса.



dr - элемент объема
 $d\sigma$ - элемент поверхности

$$= \{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$$

$$\iint_{\Sigma} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{A} dr$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$